数理解析研究所講究録
第 1872 巻 2014 年 140-150

群環の高さ 0 の表現加群と Auslander-Reiten 連結成分について

大阪市立大学理学部　河田成人

Shigeto Kawata
Department of Mathematics, Osaka City University

G を有限群とし，p は G の位数を割り切る素数で，$(K, \mathcal{O}, k)$ を p-モジュラー系とする．即ち，K は離散乗法付値 ν を持つ完備離散付値体で標数は 0 であるものとし，$\mathcal{O}$ は ν の付値環でその唯一の極大イデアル $J(\mathcal{O})$ は π で生成されていて $(\pi\mathcal{O} = J(\mathcal{O}))$，剰余体 $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ の標数は p であるとする．R によって $\mathcal{O}$ または k を表すことにし，RG で群 G の係数環 R 上の群環を表す．ここで RG 上の表現加群（RG-lattice）とは，R 上有限生成で自由な（右）RG-加群を意味するものとする．なお，$(K, \mathcal{O}, k)$ は“十分に大きい”と仮定する．正確には次の条件 (#) を満たしているとする：

(#)　p-モジュラー系の拡大 $(K, \mathcal{O}, k) > (K', \mathcal{O}', k' = \mathcal{O}'/\pi'\mathcal{O}')$ があって，$k' = k = \overline{k}$ は代数閉体であり，ν の ν' 上の分岐指数は 3 以上（即ち $\pi' \in \pi^3\mathcal{O}$）である．

群環 RG を直既約な両側イデアルの直和に分解したときの直既約因子 B を RG のブロック（イデアル）と呼ぶ．このとき，ある中心的原始冪等元 e $(= e^2 \in Z(RG))$ が存在して $B = (RG)e$ と書ける．直既約な RG-表現加群 L は，実質的にはあるブロック B 上の表現加群である $(L = Le)$．このことを強調したいときには，L を B-表現加群と呼び,「L は B に属する」と言う．有限群の表現に関する用語について詳しくは永尾-津島の本 [NT] を参照して下さい．

さて，ブロック B の Auslander-Reiten クイバー $\Gamma(B)$ とは，次のように点の集合 $\Gamma(B)_0$ と矢の集合 $\Gamma(B)_1$ を定義することによって構成される有向グラフのことである：

- 点の集合 $\Gamma(B)_0 =\{$ 直既約 B-表現加群の同型類 $[L]$ $\}$
- 矢の集合 $\Gamma(B)_1 =\{$ $[M] \to [L]$ “既約写像” $\}$

ここで準同型写像 $f : M \to N$ が既約写像とは，$f = gh$ と合成写像の形で書けるのは g が分裂全射か h が分裂単射という自明な場合しかないことをいう．既約写像は概分裂列と密接に関係している．表現加群の完全列 $\mathcal{A} : 0 \to N \to M \xrightarrow{f} L \to 0$ は次の 3 条件を満たすときに，概分裂列と呼ばれる：

(1) L と N は直既約；

(2) $\mathcal{A}$ は分裂していない；

(3) 任意の分裂全射でない準同型写像 $g : X \to L$ に対し，ある準同型写像 $h : X \to M$ が存在して $g = fh$ が成り立つ．

任意の射影的でない直既約表現加群 L に対し，L を最終項とするような概分裂列が一意的に存在することが Auslander-Reiten によって示された．概分裂列の一意性から，L を最終項とするような概分裂列を $\mathcal{A}(L) : 0 \to \tau L \to m(L) \to L \to 0$ と書き表すことにする (τ は Auslander-Reiten 移動と呼ばれている)．$R = \mathcal{O}$ のときは $\tau = \Omega$ （ここで Ω は Heller 作用素，即ち ΩL は L の projective cover の核: $0 \to \Omega L \to P_L \to L \to 0$）で，$R = k$ のときは $\tau = \Omega^2$ であることが知られている．$m(X) = \bigoplus_{i=1}^{t} M_i$ と直既約分解したとき，次が成り立つ．

命題 [Auslander-Reiten] $0 \to N \to \bigoplus_{i=1}^{t} M_i \xrightarrow{(f_1 \cdots f_t)} L \to 0$ を概分裂列とする．

(1) 各 $f_i : M_i \xrightarrow{f_i} L$ （$i = 1, \cdots, t$）は既約写像である．

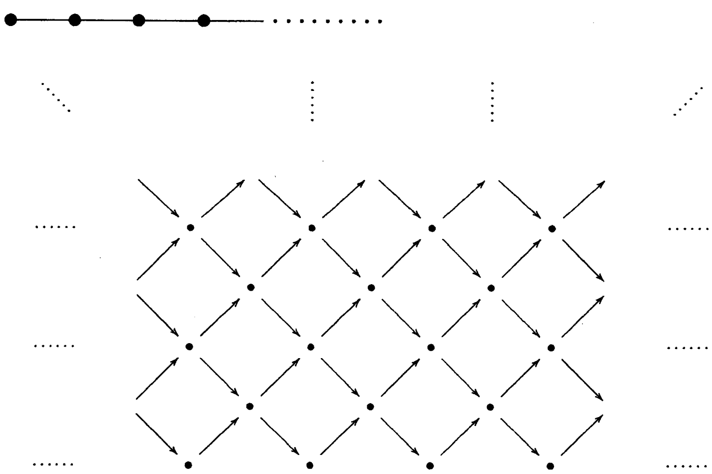
(2) 直既約加群 M から L への既約写像が存在すれば，M はある M_i に同型である．

この命題から，おおまかには，Auslander-Reiten クイバーとは概分裂列を繋ぎ合わせた有向グラフであるといえる．多元環の Auslander-Reiten 理論については，[ARS], [ASS], [B] などの本や論説 [Y] を参照して下さい．

今後，Auslander-Reiten クイバーの連結成分を，AR-成分と短く呼ぶことにする．一般に，AR-成分 Θ のグラフとしての形状は，tree と呼ばれる樹形図 T から構成される被覆クイバー $\mathbb{Z}T$ を $\mathbb{Z}T$ の自己同型からなる群 Π で剰余したものとして得られる（$\Theta \cong \mathbb{Z}T/\Pi$）[Riedtmann structure theorem]．T は Θ から一意的に定まり，Θ の tree class と呼ばれる．例えば，$T = A_\infty$ の場合には $\mathbb{Z}A_\infty$ は次のようなクイバーである：

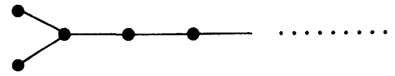
A_∞ :

$\mathbb{Z}A_\infty$



群環 RG（R は $\mathcal{O}$ または k）の tree class については Webb が次の定理を示した [We].

定理 [Webb]　$k=\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ は代数閉体で，群環 RG のブロック B は無限表現型であるとする．このとき，B の AR-成分 Θ の tree class は A_∞ かまたは

D_∞ :  ，A_∞^∞ : 

か，あるいは Euclidean diagram である．

また，もし Θ が射影的 RG-表現加群を含んでいなければ，Θ の tree class は A_∞，D_∞，A_∞^∞ のいずれかである．

ブロック B が無限表現型であるとは，直既約 B-表現加群の同型類が無限個存在するときを言う．kG のブロック B が無限表現型となるのは，B の“不足群”が巡回群でないときである．さらに，$p=2$ で不足群が dihedral, semidihedral, generalized quoternion ならば tame 表現型であり，それ以外の時は wild 表現型であることが知られている（[E1] 参照）．また $\mathcal{O}G$ のブロック B については，その不足群が巡回群でないかまたは位数が p^3 以上であれば無限表現型であることが知られている（詳しくは Dieterich[D2] 参照）．

そして，モジュラー表現（$R=k$）の場合には Erdmann が次の重要な定理を証明した [E2].

定理 [Erdmann]　もし k が代数閉体で kG のブロック B が wild 表現型であれば，B の任意の AR-成分の tree class は A_∞ である．

なお，kG のブロック B が有限表現型のとき，B の AR-クイバーの tree class は A_n である．また，$p=2$ で B の不足群が dihedral または semidihedral ならば，B の tube ではない AR-成分の tree class は A_∞^∞，$\tilde{A}_{12}$，D_∞ のいずれかである [E2].

一方で，整数表現（$R=\mathcal{O}$）の場合には，$\mathcal{O}G$ の有限表現型のブロック B に対しては，Dieterich[D1] や Wiedemann[Wi1], [Wi2] らが Auslander-Reiten クイバーを調べている．

そこで，以下では $\mathcal{O}G$ の無限表現型のブロック B の AR-成分について考察していきたい．係数環 $\mathcal{O}$ は冒頭に述べた条件 (#) を満たすものと仮定する．まず，B の AR-成分で tree class の知られている例を列挙しておこう．

例　(i) 自明な表現加群 $\mathcal{O}_G$ を含む AR-成分の tree class は A_∞ である [IK].

(ii) 自明なソースを持つ表現加群を含む AR-成分の tree class は A_∞ である [K4].

(iii) 階数が p で割り切れず，mod π で簡約化しても直既約であるような B-表現加群を含む AR-成分の tree class は A_∞ である [K5].

自明な加群 $\mathcal{O}_G$ とは，$\mathcal{O}$ に群 G を（右から）自明に作用させることで得られる $\mathcal{O}G$-加群のことである（$x \in \mathcal{O}$, $g \in G$ に対し $xg = x$）．また，自明なソースを持つ加群とは，ソースが自明な加群である直既約加群のことをいう．(換言すれば，ある置換加群の直既約因子となっている表現加群のことである．ソースについては後述する.)

定理 [K3]　係数環 $\mathcal{O}$ は条件 (#) を満たし，B は $\mathcal{O}G$ の無限表現型のブロックで，Θ を $\Gamma(B)$ の AR-成分とする．もし Θ が Heller 表現加群を含めば，Θ の tree class は A_∞ である．

群多元環 kG 上の加群 V に対して，V を整群環 $\mathcal{O}G$ 上の加群と見なして射影被覆 P_V を取ったとき，その核 Z_V を V の Heller 表現加群と呼ぶ：

$$0 \to Z_V \to P_V \to V \to 0 \text{ (完全)}.$$

ここで P_V は $\mathcal{O}G$-表現加群なので，その $\mathcal{O}$-部分加群である Z_V も $\mathcal{O}G$-表現加群である．

例として，単純な kG-加群 S の Heller 表現加群を考えよう．S の kG-加群としての射影被覆 $\overline{P}$ は，$\mathcal{O}G$-加群 P に持ち上げ可能である：$P/\pi P \cong \overline{P}$．即ち，$P$ が S を $\mathcal{O}G$-加群と見たときの射影被覆である．よって P の根基 $\mathrm{rad}(P)$ が S の Heller 表現加群である．$(K, \mathcal{O}, k)$ が条件 (#) を満たしているとき，Heller 表現加群は直既約である [K2, K2']．

系　係数環 $\mathcal{O}$ は条件 (#) を満たし，B は $\mathcal{O}G$ の無限表現型のブロックとする．このとき，$\Gamma(B)$ の AR-成分の tree class は A_∞, D_∞, A_∞^∞ のいずれかである（Eucledian の可能性を除外できる）．

証明　もし AR-成分 Θ が射影加群を含んでいなければ，Θ の tree class は Webb の定理から A_∞, D_∞, A_∞^∞ のいずれかである．また，もし AR-成分 Θ がある射影加群 P を含めば，(埋込 $\mathrm{rad}(P) \hookrightarrow P$ は既約写像なので）Θ は P の根基 $\mathrm{rad}(P)$ も含む．$\mathrm{rad}(P)$ は Heller 表現加群であるので，上の定理から，Θ の tree class は A_∞ である．　□

B を群環のブロックとし，D を B の不足群とする．このとき，M が B 上の表現加群であれば，ある RD-加群 S が存在して，M は誘導加群 $S \otimes_{RD} RD$ の直和因子として現れる．ブロックの不足群は p-群であることが知られている．p^a を G の Sylow p-部分群の位数とし，p^d を不足群 D の位数とすれば，$\mathrm{rank}_R M$ は p^{a-d} で割り切れることが分かる．

定義　B 上の表現加群 M の高さ $\mathrm{h}(M)$ とは

$$(\mathrm{rank}_R M)_p = p^{a-d+\mathrm{h}(M)}$$

を満たす非負整数として定義する．ここで $(\mathrm{rank}_R M)_p$ は $(\mathrm{rank}_R M)$ の p-part を表す．

直既約な RG-表現加群 L に対して，ヴァーテックスとソースが定義される．G の部分群からなる集合

$$\{\, H \leq G \mid \exists\, RH\text{-表現加群 } S \text{ が存在して } L \text{ は誘導加群 } S \otimes_{RH} RG \text{ の直和因子} \,\}$$

の極小元を L のヴァーテックスと呼ぶ．ヴァーテックスは共役を除いて一意的に決まる．また H が L のヴァーテックスのとき，$S \otimes_{RH} RG$ が直和因子として L を持つような RH-加群 S を L の H-ソースと呼ぶ．ソースも共役を除いて一意的に決まる．

高さ 0 の表現加群について，次が成り立つ（証明については [Kn, Proof of Corollary 4.7] など参照）．

命題　ブロック B は高さ 0 の表現加群を持つ．高さ 0 の直既約な表現加群のヴァーテックスは B の不足群 D と一致し，その D-ソースの階数は p で割り切れない．

Carlson-Jones[CJ] は $\mathcal{O}G$ 上の表現加群の exponent と，exponential property という特性を定義した．

定義 [Carlson-Jones]　$\mathcal{O}G$-表現加群 L に対し，$\pi^a \mathrm{Id}_L$ ($\in \mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(L)$) が projective となる（即ち，ある射影加群を通過する）ような最小の累乗 π^a を L の exponent と呼び，$\exp(L) = \pi^a$ と書く．また，L が exponential property を持つとは，$\exp(L) = \pi^a$ で $\pi^{a-1}\mathrm{Id}_L$ が almost projective となるとき，即ち，L の射影被覆の $\pi^{a-1}\mathrm{Id}_L$ による pull back によって概分裂列 $\mathcal{A}(L)$ が構成できるときをいう：

$$\begin{array}{lccccccccc}
\mathcal{A}(L)\colon & 0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & m(L) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \Big\| & & \Big\downarrow & \text{pull back} & \Big\downarrow {\scriptstyle \pi^{a-1}\mathrm{Id}_L} & & \\
 & 0 & \longrightarrow & \Omega L & \longrightarrow & P_L & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$\mathcal{O}G$-表現加群 L が既約 (irreducible) であるとは，$K \otimes_{\mathcal{O}} L$ が既約な KG-加群となるときをいう．Knörr[Kn] は既約性を拡張して virtually irreducible という概念を導入した．この概念は，$(K, \mathcal{O}, k)$ が条件 (#) を満たしている仮定の下では，Carlson-Jones による exponential property と同値である [CJ, Section 4]．

定義 [Knörr]　L を $\mathcal{O}G$ 上の表現加群とし，$\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_L : \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(L) \to \mathcal{O}$ をトレース写像とする．次の条件を満たすとき L は virtually irreducible であると言う：

任意の $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(L)$ に対して $\nu(\mathrm{tr}\ \alpha) \geq \nu(\mathrm{rank}_{\mathcal{O}} L)$ が成り立ち，

等号が成立するのは α が同型のときに限る．(ν は $\mathcal{O}$ の離散付値)

例 (1) $\mathcal{O}G$-表現加群 L が既約 (irreducible) ならば virtually irreducible である.
(2) 直既約な $\mathcal{O}G$-表現加群 L の階数が p で割り切れなければ virtually irreducible である.

Knörr は次の定理を示した [Kn, 4.5 Theorem].

定理 [Knörr] B は $\mathcal{O}G$ のブロックで不足群 D を持つとする. 直既約な B-表現加群 L は D をヴァーテックスとして持ち, S を L の D-ソースとする. このとき, L が virtually irreducible であるための必要十分条件は S が virtually irreducible であることである.

この定理から次のことが系として言える.

系 L を高さ 0 の $\mathcal{O}G$-表現加群とする. L の属するブロック B は不足群 D を持つとし, S を L の D-ソースとする.
(1)[Kn, 4.7 Corollary] L は virtually irreducible である. また, S も virtually irreducible で, $\mathrm{rank}_{\mathcal{O}}S$ は p で割り切れない.
(2) $\exp(L)=\exp(S)$ (即ち, $\exp(L)=\exp(S)=\pi^a$ のとき, $\pi^{a-1}\mathrm{Id}_L$, $\pi^{a-1}\mathrm{Id}_S$ はともに almost projectve である).

高さ 0 の $\mathcal{O}G$-表現加群を含む AR-成分に関して, 次の結果が得られた.

定理 L は高さ 0 の $\mathcal{O}G$-表現加群で, L の属するブロックを B とする. B は不足群 D を持つとし, S を L の D-ソースとする. L が含まれている AR-成分を Θ とおき, S が含まれている ($\Gamma(\mathcal{O}D)$ の) AR-成分を Ξ とおく. このとき, Θ の tree class が A_∞ であることと Ξ の tree class が A_∞ であることは同値である.

証明の概略 $\mathcal{O}G$ の Auslander-Reiten クイバーに関して興味深いと思われる事実を紹介しつつ, この定理の証明の概略を述べたい. 次の補題は [K2, Proposition 4.5] で示された.

> **補題 1** L が Heller 表現加群でなければ, 概分裂列 $\mathcal{A}(L)$ を modulo π で簡約化した kG-加群の短完全列 $0\to\Omega L/\pi\Omega L\to m(L)/\pi m(L)\to L/\pi L\to 0$ は分裂する.

$\mathcal{O}G$-表現加群 M に対して, $\alpha(M)$ で kG-加群 $M/\pi M$ の直既約分解における直和因子の個数を表すことにしよう. Θ と Ξ には Heller 表現加群が含まれないことが確かめられるので, 補題 1 から次のことが言える.

補題 2 写像 $\alpha|_{\Theta}: \Theta \ni M \mapsto \alpha(M) \in \mathbb{N}$ および $\alpha|_{\Xi}: \Xi \ni N \mapsto \alpha(N) \in \mathbb{N}$ は Ω-periodic additive function である.

L は高さ 0 の B-表現加群なので，$L/\pi L$ の直既約因子として高さ 0 の kG-加群が現れるが，その因子のヴァーテックスは D である．このことと補題 1 から次の事実も導かれる．

補題 3 Θ に含まれるすべての B-表現加群のヴァーテックスは D である．また，Ξ に含まれるすべての $\mathcal{O}D$-表現加群のヴァーテックスも D である．

Inoue-Hieda は，Green 対応が AR-成分の間にグラフとしての同型を引き起こすことを示した [IH]．この事実と補題 3 から，D は G の正規部分群であると仮定してもよいと分かる．

では，Θ の tree class が A_∞ であるとき，Ξ の tree class も A_∞ であることを示そう．

$$T = T_{\Theta} : L_1 \leftarrow L_2 \leftarrow \cdots \leftarrow L_{2n} \leftarrow L = L_{2n+1} \leftarrow L_{2n+2} \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow \quad (\subset \Theta)$$

を，L_{i+1} が $m(L_i)$ ($m(L_i)$ は $\mathcal{A}(L_i)$ の中間項) の直和因子で $\Theta = \mathbb{Z}T$ となるように取る．階数を計算すると，$p^{a-d} \parallel \mathrm{rank}_{\mathcal{O}} L_{2i+1}$ (従って L_{2i+1} は高さ 0) で特に L_{2i+1} は virtually irreducible であり，一方では $p^{a-d+1} \mid \mathrm{rank}_{\mathcal{O}} L_{2i}$ であることに注意しておく．$D \trianglelefteq G$ から $L\downarrow_D = \bigoplus_g S^g$ (g は G のいくつかの元を渡る) と書けるが，Knörr の定理の系 (ii) から

$$\mathcal{A}(L)\downarrow_D = \bigoplus\nolimits_g \mathcal{A}(S^g)$$

が成り立つ．同様に，S_t を L_t の D-ソースとすると，$m(L) = L_{2n+2} \oplus \Omega^{-1} L_{2n}$ なので

$$m(L)\downarrow_D = \bigoplus\nolimits_g (S_{2n+2} \oplus \Omega^{-1} S_{2n})^g$$

となり，また Knörr の定理の系 (ii) から

$$\mathcal{A}(L_{2n+3})\downarrow_D = \bigoplus\nolimits_g \mathcal{A}(S_{2n+3})^g$$

が成り立つので

$$m(L_{2n+3})\downarrow_D = \bigoplus\nolimits_g (S_{2n+4} \oplus \Omega^{-1} S_{2n+2})^g$$

も言える．ここで $S_{2n+2} \mid m(S)$, $S_{2n+3} \mid m(S_{2n+2})$ を満たすように取っておく．繰り返して $m(S_i)$ の直和因子 S_{i+1} を選んで

$$T_{\Xi} : \cdots \leftarrow S_{2n} \leftarrow S = S_{2n+1} \leftarrow S_{2n+2} \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow \quad (\subset \Xi)$$

のような walk を得る．ここで AR-成分の tree class が A_∞ であるための必要十分条件は，AR-成分が unbounded Ω-periodic additive function を持つことに留意しておこう．さて補題 2 で定義した additive function $\alpha|_{\Theta}$ について，Θ の tree class は A_∞ と仮定したので，

$\{\alpha(L_i) \mid i=1,2,\cdots\}$ は unbounded であり，$\{\alpha(S_i) \mid i=1,2,\cdots\}$ も unbounded となる．このことから Ξ の tree class も A_∞ であると分かる．

こんどは逆に，Ξ の tree class が A_∞ であるとする．

$$T = T_\Xi : S_1 \leftarrow S_2 \leftarrow \cdots \leftarrow S_{2n} \leftarrow S = S_{2n+1} \leftarrow S_{2n+2} \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow \quad (\subset \Xi)$$

を，S_{i+1} が $m(S_i)$ （$m(S_i)$ は $\mathcal{A}(S_i)$ の中間項）の直和因子で $\Xi = \mathbb{Z}T$ となるように取る．階数を計算すると，$p \nmid \mathrm{rank}_\mathcal{O} S_{2i+1}$ で特に S_{2i+1} は virtually irreducible であり，また一方で $p \mid \mathrm{rank}_\mathcal{O} S_{2i}$ であることに注意しておく．$e = e_B$ を B の中心的原始冪等元とすると，$G \trianglerighteq D$ であって $S_{2i+1} \uparrow^G \downarrow_D = \bigoplus_{g \in G/N} S_{2i+1}^g$ なので，S_{2i+1} は B-表現加群 $(S_{2i+1} \uparrow^G)e = \bigoplus_\lambda L_\lambda$ のすべての直既約因子 L_λ (当然 $L \mid S \uparrow^G e$) の D-ソースである．特に Knörr の定理から，$(S_{2i+1} \uparrow^G)e$ のすべての直和因子 L_λ は virtually irreducible である．従って

$$(\mathcal{A}(S_{2i+1}) \uparrow^G)e = \bigoplus\nolimits_\lambda \mathcal{A}(L_\lambda)$$

が成り立つ． それゆえ，$S_t \uparrow^G e$ のある直和因子 L_t （$t = 1, 2, \cdots$）を取ってきて，

$$T_\Theta : L_1 \leftarrow L_2 \leftarrow \cdots \leftarrow L_{2n} \leftarrow L = L_{2n+1} \leftarrow L_{2n+2} \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow \quad (\subset \Theta)$$

のような walk を Θ のなかで辿ることができる．いま，補題 2 で定めた additive function $\alpha|_\Xi$ について，$\{\alpha(S_i) \mid i=1,2,\cdots\}$ が unbounded なので，$\{\alpha(L_i) \mid i=1,2,\cdots\}$ も unbounded である．このことから Θ の tree class も A_∞ である． □

この定理に関連して，いくつか注意を述べたい．定理と同じ仮定・記号を以後も引き継ぐ．

注意 1 もし kG-加群 $S/\pi S$ が直既約かまたはその直既約分解において p'-次元の因子がただ一つしか現れなければ，S を含む AR-成分 Ξ の tree class は A_∞ である [K5, Theorem 3.1]．従って Θ の tree class も A_∞ である．

注意 2 $p = 2$ のとき，奇数階数の $\mathcal{O}G$-表現加群を含む AR-成分の tree class は A_∞ である [K5, Proposition 3.4]．特に S を含む AR-成分 Ξ の tree class は A_∞ であり，従って Θ の tree class も A_∞ である．

注意 3 定理の仮定につけ加えてさらに，$L/\pi L$ は直既約と仮定する．このとき概分裂列 $\mathcal{A}(L)$ の中間項 $m(L)$ は直既約なことが分かる：実際，$m(L) = X \oplus Y$ と仮定してみよう．$\mathcal{A}(L)$ は modulo π で分裂するので，$X/\pi X = L/\pi L$ （$Y/\pi Y = \Omega L/\pi\Omega L$） としてよい．このとき階数を見て X, Y は高さ 0 であると分かり，特に virtually irreducible である．しかしこれは [CJ, Theorem 2.4] に矛盾する．従って Θ ($\ni L$) の tree class は A_∞ かまたは D_∞

である．さらに，p'-階数の直既約$\mathcal{O}D$-表現加群を含む AR-成分（特に Ξ）の tree class は D_∞ ではない [K5, Lemma 3.2] ので，次が成り立つ：

$$\Theta \text{ の tree class は } D_\infty \Longleftrightarrow \Xi \text{ の tree class は } A_\infty^\infty.$$

なお，$\mathcal{O}G$ のブロック B は，任意の既約な通常指標 χ ($\in \mathrm{Irr}(B)$) に対して次の２条件を満たす既約な B-表現加群 V を持つことが Thompson によって指摘されている [Tho].

(i) V は χ を与える．

(ii) $V/\pi V$ は直既約な kG-加群である．

注意4　注意３において，Θ の tree class が D_∞ であるとする．このとき $N_G(D)/D$ の位数は偶数である．従って，もし $|N_G(D)/D|$ が奇数で $L/\pi L$ が直既約ならば，Θ の tree class は A_∞ である．

証明　もし Θ の tree class が D_∞ ならば $|T(\Theta):D|$ (ここで $T(\Theta) := \{x \in N_G(D) \mid \Theta^x = \Theta\}$) は偶数であることを示す．$G = N_G(D)$ としてよい．また注意２から，$p \neq 2$ としてよい．L は $\Theta \cong \mathbb{Z}D_\infty$ の end に位置しているので，Θ 内の walk

$$\begin{array}{ccccccccc} L_1\ (=L) & \longleftarrow & L_2 \longleftarrow & L_3 \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow L_t \longleftarrow \cdots\cdots \\ & & \downarrow & & & \\ & & \tilde{L} & & & \end{array}$$

で L_{i+1} が $m(L_i)$ の直和因子となるものが取れる（$i = 1,\ 2,\ \ldots$）．階数を end から計算すると

$$\mathrm{rank}_{\mathcal{O}} L_{2i+1} \equiv \pm 2\mathrm{rank}_{\mathcal{O}} L \pmod{p^{a-d}}$$

となり（$i = 1,\ 2,\ \ldots$），今 $p \neq 2$ なので $p^{a-d} \parallel \mathrm{rank}_{\mathcal{O}} L_{2i+1}$，即ち各 L_{2i+1} は高さ０で Knörr の定理より virually irreducible である．よって，$D \trianglelefteq G$ から $L\downarrow_D = \bigoplus_g S^g$（$g$ は G の元のいくつかを渡る）となり，Knörr の定理の系から

$$\mathcal{A}(L)\downarrow_D = \bigoplus\nolimits_g \mathcal{A}(S^g)$$

が成り立つ．従って

$$L_2\downarrow_D \cong \bigoplus\nolimits_g m(S)^g$$

が成り立つ．注意３から Ξ の tree class は A_∞^∞ なので，$\mathcal{A}(S)$ は，L_2 のある D-ソース S_2 とある $g \in G$ を用いて

$$0 \to \Omega S \to S_2 \oplus {S_2}^g \to S \to 0$$

と書ける．また同様に，L_{2i+1} の D-ソースを S_{2i+1} とおくと

$$\mathcal{A}(L_{2i+1})\downarrow_D = \bigoplus\nolimits_g \mathcal{A}({S_{2i+1}}^g)$$

が成り立つ ($i=1, 2, \ldots$)．従って，Ξ の中に

$$\cdots - S_i^g - \cdots - S_2^g - S = S_1 - S_2 - \cdots - S_i - \cdots \quad (\exists g \in G)$$

のような walk を取ることができる．また Θ は無限個の Ω-orbits を持つ ($\{\Omega^m L_i\}_{m\in\mathbb{Z}} \neq \{\Omega^m L_j\}_{m\in\mathbb{Z}}$ $(i \neq j)$) から

$$\{\Omega^m S_i\}_{m\in\mathbb{Z}} \neq \{\Omega^m S_j\}_{m\in\mathbb{Z}} \quad (i \neq j)$$

が言えるので，Ξ も無限個の Ω-orbits を持ち，特に $\Xi \cong \mathbb{Z}A_\infty^\infty$ と分かる．そして g は Ξ ($\cong \mathbb{Z}A_\infty^\infty$) の graph isomorphism を引き起こし，その位数は (Aut(Ξ) において) 2 である． □

参考文献

[ASS] Assem, I., Simson, D. and Skowroński, A.: Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1, Techniques of Representation Theory, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 65, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[ARS] Auslander, M., Reiten, I. and Smalø, S.: Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Studies in Advanced Math. 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[B] Benson, D. J.: Representations and cohomology I, Cambridge Studies in Advanced Math. 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[CJ] Carlson, J. F. and Jones, A.: *An exponential property of lattices over group rings*, J. London Math. Soc. **39**(1989), 467–479.

[D1] Dieterich, E.: *Construction of Auslander-Reiten quivers for a class of group rings*, Math. Z. **184**(1983), 43–60.

[D2] Dieterich, E.: *Representation types of group rings over complete discrete valuation rings* II, In: Reiner, I. and Roggenkamp, K.W.(Eds.), Orders and their Applications (Oberwolfach, 1984), pp. 112–125, Lecture Notes in Math. 1142, Springer, Berlin, 1985.

[E1] Erdmann, K.: Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Note in Math. 1428, Springer, Berlin/New York, 1990.

[E2] Erdmann, K.: *On Auslander-Reiten components for group algebras*, J. Pure Appl. Algebra **104**(1995), 149–160.

[IH] Inoue, T. and Hieda, Y.: *A note on Auslander-Reiten quivers for integral group rings*, Osaka J. Math. **32**(1995), 483–494.

[IK] Inoue, T. and Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and trivial modules for integral group rings of p-groups*, J. Algebra **203**(1998), 374–384.

[K1] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and projective lattices of p-groups*, Osaka J. Math. **38**(2001), 487–499.

[K2] Kawata, S.: *On Heller lattices over ramified extended orders*, J. Pure Appl. Algebra **202**(2005), 55–71.

[K2'] Kawata, S.: *Erratum to "On Heller lattices over ramified extended orders"*, J. Pure Appl. Algebra **212**(2008), 1849–1851.

[K3] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and Heller lattices for integral group rings*, Algebr. Represent. Theory **9**(2006), 513–524.

[K4] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and trivial source lattices for integral group rings*, J. Algebra **322**(2009), 1395–1405.

[K5] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and splitting trace lattices for integral group rings*, J. Algebra **359**(2012), 69–79.

[Kn] Knörr, R.: *Virtually irreducible lattices*, Proc. London Math. Soc. **59**(1989), 99–132.

[NT] 永尾汎, 津島行男: 有限群の表現, 裳華房, 1987.

[Tho] Thompson, J.G.: *Vertices and sources*, J. Algebra **6**(1967), 1–6.

[We] Webb, P.J.: *The Auslander-Reiten quiver of a finite group*, Math. Z. **179**(1982), 97–121.

[Wi1] Wiedemann, A.: *The Auslander-Reiten graph of integral blocks with cyclic defect two and their integral representations*, Math. Z. **179**(1982), 407–430.

[Wi2] Wiedemann, A.: *A remark on the structure of the Auslander-Reiten quiver of orders, blocks with cyclic defect two and the Dynkin diagram* $\mathbb{E}_6$, Arch. Math. **45**(1985), 211–218.

[Y] 山形邦夫: 有限次元自己入射多元環の表現とその周辺, 数学 **61**(2009), 270–292.